2. Ecuaciones diferenciales lineales de n-ésimo orden

2.1 Dada la ecuación $y^{(iv)} = 0$. Pruebe que el conjunto de funciones $\{1, x, x^2, x^3\}$ son soluciones linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$, por medio del wronskiano.

2.2 Verifíquese que $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones en $I\!R$ de

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

2.3 Dadas $y_1 = \operatorname{sen}^2 x$, $y_2 = \cos(2x)$ e $y_3 = 1$, soluciones de la ecuación diferencial $y''' + 4y' = 0$. Estudie su dependencia lineal en $(-\infty, \infty)$, usando el wronskiano.

2.4 Halle un sistema fundamental de soluciones de la ecuación

$$(1 + x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

sabiendo que admite soluciones de la forma $y = x^2 + k_1 x + k_2$, con $k_1, k_2 \in I\!R$.

2.5 Compruebe que $y_1 = x^2$ es una solución de $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$. Encuentre (usando una representación del wronskiano) otra solución y_2 linealmente independiente con y_1, y obtenga la solución general de la ecuación.

2.6 Halle una solución del tipo $y_1 = Ae^x$, siendo A una constante real, de la ecuación

$$(x - 1)y'' - xy' + y = 0$$

y encuentre (usando una representación del wronskiano) otra solución y_2 linealmente independiente con y_1.

2.7 Determine los coeficientes A, B y C de modo que la ecuación

$$(x^2 + 1)y'' - 2xy' - (Ax^2 + Bx + C)y = 0$$

admita $x = e^{mx}$ como solución y halle su solución general.

2.8 Resuelva la ecuación $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$ sabiendo que admite dos souciones cuyo cociente es igual a $\tan x$.

2.9 Dado el problema de Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - 4xy' + 6y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Compruébese que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son dos soluciones del mismo. ¿Por qué esto no contradice el Teorema de existencia y unicidad de solución?

2.10 Resuelva el problema de Cauchy

$$(P) \begin{cases} y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0, \quad x < 1 \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 2 \end{cases}$$

sabiendo que $y_1 = x$ es una solución de la ecu-diferencial dada en (P) y usando el método de reducción de orden, $y = v(x)y_1$, para encontrar una segunda solución.

2.11 Resuelva las siguientes ecuaciones por el método de variación de las constantes, a partir del sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada:

$$x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^2e^x, \qquad \{x, x^3\}$$

$$(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = (x^2+1)^2, \qquad \{x^2-1, x\}$$

2.12 Sabiendo que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son dos soluciones de la ecuación homogénea asociada, resuelva la ecuación:

$$y''' - \frac{2x}{x^2-2}y'' - y' + \frac{2x}{x^2-2}y = 0, \quad x > \sqrt{2}$$

2.13 Halle la solución general (soluciones reales) de las siguientes ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes:

(a) $y'' + 16y = 0$ (b) $y''' - 4y'' + 4y = 0$

(c) $y'' - y' - 6y = 0$ (d) $y''' + y' = 0$

(e) $y''' + y' = 0$ (f) $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$

(d) $y^{(4)} + 4\alpha y''' + 3\alpha^2 y'' = 0$, según los valores del parámetro real α.

2.14 Resuelva las siguientes ecuaciones lineales completas por el método de similitud:

(a) $y''' - y'' = 12x^2 + 6x$

(b) $y''' + 2y'' + y' = 4e^x + 2$

(c) $y'' + y = x \operatorname{sen} x$

(d) $y''' - 4y'' + 4y' = 8x$

2.15 Resuelva las siguientes ecuaciones lineales completas por el método de variación de las constantes:

(a) $y''' + 4y' = \frac{1}{\operatorname{sen}(2x)}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ (b) $y'' + y = \frac{2}{(\cos x)^3}$, $x \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2.16 Encuentre la solución de los siguientes problemas de valores iniciales:

(a) $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0; \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0, \ y'(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y^{(4)} + 2y''' + 5y'' = 0 \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 0, \ y'''(0) = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 8e^x \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1, \ y''(0) = 1 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} y''' + 3y'' + 3y' + y = e^{-x} \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 0, \ y''(0) = 1 \end{cases}$

2.17 Resuelva las siguientes ecuaciones de Euler:

(a) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 3$.

(b) $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$.

(c) $x^3y''' + 5x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$.

(d) $x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 2x^2$.

(e) $x^3y''' + 5x^2y'' + 4xy' = 1 + \ln x$.